

# סדנת ריענון במתמטיקה למדעי החברה

פרק 5 - חוקי הלוגריתמים, משוואות ואי-שוויונים לוגריתמים

תוכן העניינים

1. הגדרת הלוגריתם ומשוואות יסודיות..... 1
2. חוקי הלוגריתמים..... 3
3. הלוגריתם הטבעי..... 5
4. משוואות עם בסיסים שונים..... 7
5. אי-שוויונים לוגריתמים..... 8

## הגדרת הלוגריתם ומשוואות יסודיות

### סיכום כללי

#### הגדרה

הלוגריתם מוגדר באופן הבא:  $\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b$ , כאשר:  $a > 0, a \neq 1, b > 0$ .

#### הסבר

לוגריתם על בסיס  $a$  של  $b$  מוגדר בתור החזקה שיש להעלות את  $a$ , על מנת שיהיה שווה ל- $b$ . ערך חזקה זו הוא  $x$ .  
 ערך לוגריתם יכול להיות חיובי, שלילי או אפס.  
 נחשב ערכי לוגריתמים ונפתור משוואות לוגריתמיות על ידי מעבר לפי ההגדרה למשוואה מעריכית מתאימה.

#### כללים יסודיים בלוגריתמים

מהגדרת הלוגריתם נובע כי:  $\log_a a = 1$  וכן:  $\log_a 1 = 0$ , לכל  $a > 0, a \neq 1$ .

#### שאלות

(1) חשב ללא מחשבון את ערכי הביטויים הלוגריתמים הבאים:

א.  $\log_2 32$       ב.  $\log 1000$       ג.  $\log_{25} 5$

ד.  $\log_8 4$       ה.  $\log_4 \frac{1}{16}$       ו.  $\log_a a^4$

ז.  $\log_a \frac{1}{a\sqrt{a}}$

(2) פתור את המשוואות הלוגריתמיות הבאות (יסודי - שימוש בהגדרת הלוג):

א.  $\log_{36} 6 = x$       ב.  $\log_2 x = 16$

ג.  $\log_{\frac{1}{9}} x = -1.5$       ד.  $\log_x 64 = 3$

ה.  $\log_x 25 = 2$       ו.  $\log_x (3x + 4) = 2$

(3) פתור את המשוואות הלוגריתמיות הבאות (כללי - שימוש בהגדרת הלוג):

ב.  $\log_8(x^4 - 73) = 1$

א.  $\log_6(4x - 2) = 1$

ג.  $\log_3 \frac{x+3}{3-3x} = -2$

(4) פתור את המשוואה הלוגריתמית הבאה:  $\log_4(\log_3 x) = 1$ .

(שימוש בהגדרת הלוג מספר פעמים)

(5) פתור את המשוואה הלוגריתמית הבאה:  $\log_2(3^x + 37) = 6$ .

(מתקבלת משוואה מעריכית)

(6) פתור את המשוואה הלוגריתמית הבאה (הצבה):  $(\log_2 x)^4 = 10000$ .

### תשובות סופיות

(1) א. 5      ב. 3      ג.  $\frac{1}{2}$       ד.  $\frac{2}{3}$       ה. -2

ו. 4      ז. -1.5

(2) א.  $x = \frac{1}{2}$       ב.  $x = 65,536$       ג.  $x = 27$       ד.  $x = 4$

ה.  $x = 5$       ו.  $x = 4$

(3) א.  $x = 2$       ב.  $x = \pm 3$       ג.  $x = -2$

(4)  $x = 81$

(5)  $x = 3$

(6)  $x = 1024, \frac{1}{1024}$

## חוקי הלוגריתמים:

### סיכום כללי:

- להלן 3 חוקי הלוגריתמים עבור בסיס  $a > 0 \neq 1$  וארגומנטים  $x$  ו- $y$  חיוביים:
- מכפלה לסכום:  $\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$ .
  - מנה להפרש:  $\log_a \left( \frac{x}{y} \right) = \log_a x - \log_a y$ .
  - מקדם למעריך:  $\log_a b^n = n \log_a b$  (כאשר  $b > 0$  ו- $n$  מספר ממשי כלשהו).

### שאלות:

#### שאלות חישוב כלליות:

- (1) חשב ללא מחשבון את ערכי הביטויים הבאים (שימוש בחוקי הלוגים):
- א.  $\log_3 12 + \log_3 2.25$   
 ב.  $\log_{\frac{1}{5}} 40 + \log_{\frac{1}{5}} 12.5 + \log_{\frac{1}{5}} \frac{1}{4}$   
 ג.  $\log_2 200 - \log_2 100$

- (2) חשב ללא מחשבון את ערכי הביטויים הבאים (שימוש בחוקי הלוגים):
- א.  $\frac{\log_5 16}{\log_5 8}$   
 ב.  $\frac{\log_9 62.5 + \log_9 2}{\log_9 0.2}$

#### משוואות לוגריתמיות:

- (3) פתור את המשוואות הבאות (שימוש ישיר בחוקי הלוגריתמים):
- א.  $\log_2 x + \log_2 (x-6) = 4$   
 ב.  $\log_3 x + \log_3 (x+2) = 1$
- (4) פתור את המשוואות הבאות (פתרון בשיטת לוג שווה לוג):
- א.  $\log_5 (4x-3) = \log_5 7$   
 ב.  $2 \log_2 (2x-2) - \log_2 (16-x) = \log_2 (x-1) + 1$

(5) פתור את המשוואות הבאות (מתקבלת משוואה מעריכית):

א.  $\log_3(3 \cdot 5^x + 39) = 3 + \log_3(5^x - 3)$

### תשובות סופיות:

(1) א. 3      ב. -3      ג. 1

(2) א.  $\frac{4}{3}$       ב. -3

(3) א.  $x = \frac{1}{4}, 256$       ב.  $x = 3, \frac{1}{27}$

(4) א.  $x = 2.5$       ב.  $x = 6$

(5)  $x = 1$

## הלוגריתם הטבעי

### סיכום כללי

לוגריתם על בסיס  $e$  (קבוע אוילר) מסומן:  $\log_e \Rightarrow \ln$  ונקרא הלוגריתם הטבעי.

למשל:  $\ln 3 = \log_e 3$  או  $\ln \frac{1}{4} = \log_e \frac{1}{4}$ . לוג זה נקרא בשם לן.

מהגדרת הלוגריתם מתקיים:  $\ln a = b \rightarrow e^b = a$ , כאשר  $a > 0$  ו- $b$  מספרים.

### שאלות

(1) חשב ללא מחשבון את ערכי הביטויים הלוגריתמיים הטבעיים הבאים:

$$\text{א. } \ln e^2 \quad \text{ב. } \ln \frac{1}{e^4} \quad \text{ג. } \ln \frac{1}{e\sqrt{e}}$$

(2) פתור את המשוואות הלוגריתמיות הבאות (שימוש בהגדרת הלוג):

$$\text{א. } \ln x = 2 \quad \text{ב. } \ln x = -\frac{1}{2}$$

(3) פתור את המשוואות הבאות (הצבה וחוקי הלוגריתמים):

$$\begin{aligned} \text{א. } \ln\left(e^{2x} - \frac{1}{2}\right) + \ln 2 &= x \\ \text{ב. } 3\ln^2 x + \ln x &= 2 \\ \text{ג. } \ln(e^2 x^3) \cdot \ln \frac{1}{x} &= \ln(ex^2) \end{aligned}$$

(4) פתור את המשוואות הלוגריתמיות הבאות (הוצאת לוג משני אגפי המשוואה)

$$\text{א. } x^{\ln x} = e^6 x \quad \text{ב. } \left(\frac{1}{x}\right)^{2-3\ln x} = \frac{1}{e} \cdot x^{1+\ln x}$$

(5) חשב ללא מחשבון את ערכי הביטויים הבאים (חזקה לוגריתמית):

$$\text{א. } e^{\ln 3} \quad \text{ב. } e^{2\ln 3}$$

### תשובות סופיות

- (1) א. 2      ב. -4      ג. -1.5
- (2) א.  $x = e^2$       ב.  $x = \frac{1}{\sqrt{e}}$
- (3) א.  $x = 0$       ב.  $x = \sqrt[3]{e^2}, \frac{1}{e}$       ג.  $x = \frac{1}{\sqrt[3]{e}}, \frac{1}{e}$
- (4) א.  $x = e^3, \frac{1}{e^2}$       ב.  $x = \sqrt{e}, e$
- (5) א. 3      ב. 9

## משוואות עם בסיסים שונים:

### סיכום כללי:

לעיתים תתקבל משוואה מעריכית שבה לא ניתן למצוא חזקה שלמה, כגון:  $3^x = 4$ . במקרים אלו נעזר בהגדרת הלוג כדי לבטא את ערך המעריך:  $x = \log_3 4$ . את ערך הביטוי  $\log_3 4$  ניתן לחשב ע"י מחשבון או ע"י מעבר לבסיס 10:  $\log_3 4 = \frac{\log 4}{\log 3}$ .

### שאלות:

(1) פתור את המשוואות הבאות (בסיסים שונים):

א.  $3^x = 6$       ב.  $2^x - 9 = 0$

(2) פתור את המשוואות הבאות (משוואות עם בסיס ולוגריתם טבעי):  $e^{3x} = 3$

### תשובות סופיות:

(1) א.  $x = \log_3 6 = 1.63$       ב.  $x = \log_2 9 = 3.17$

(2)  $x = \frac{1}{3} \ln 3 = 0.36$



## אי-שוויונים לוגריתמים

### סיכום כללי

פתרון אי-השוויון  $\log_a x > \log_a y$  הוא  $x > y$ , עבור  $a > 1$ , ו- $x < y$  עבור  $0 < a < 1$ .

### שאלות

פתור את אי-השוויונים הבאים:

$$\log_2 x < \log_2 (5x - 20) \quad (1) \qquad \ln x \geq \ln(x^2 - 12) \quad (2)$$

$$\ln x < 3 \quad (3) \qquad \ln^2 x - 6 \ln x < 7 \quad (4)$$

$$\frac{6}{\ln^2 x} \geq 2 - \frac{1}{\ln x} \quad (5)$$

### תשובות סופיות

$$x > 5 \quad (1) \qquad 2\sqrt{3} < x \leq 4 \quad (2)$$

$$0 < x < e^3 \quad (3) \qquad \frac{1}{e} < x < e^7 \quad (4)$$

$$x \neq 1 \text{ וגם } \frac{1}{\sqrt{e^3}} \leq x \leq e^2 \quad (5)$$